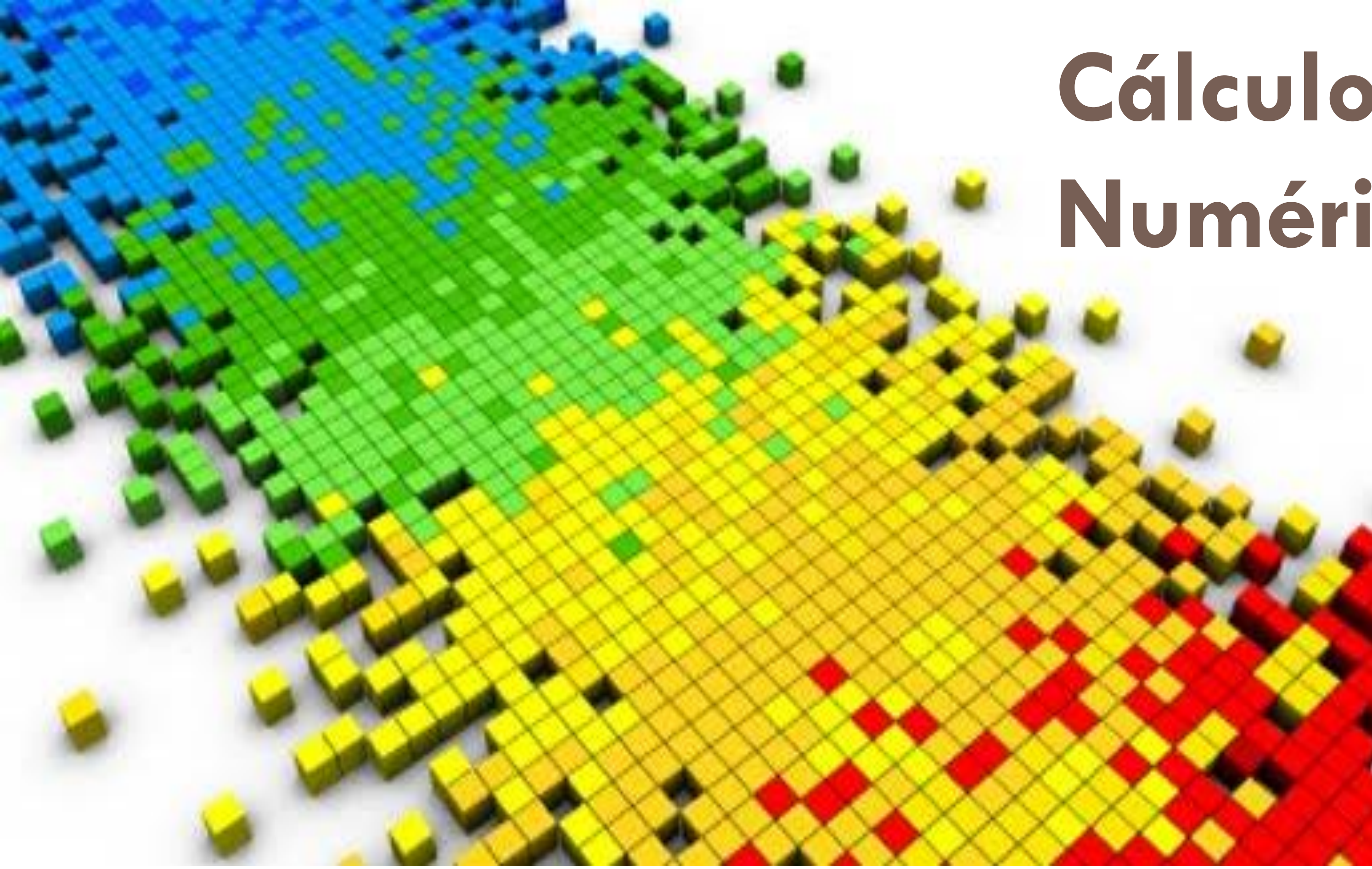


Cálculo Numérico

Aula 4 – Zeros de Funções

2014.1 - 09/04/2014

Prof. Rafael mesquita

rgm@cin.ufpe.br

Adpt. por Prof. Guilherme Amorim

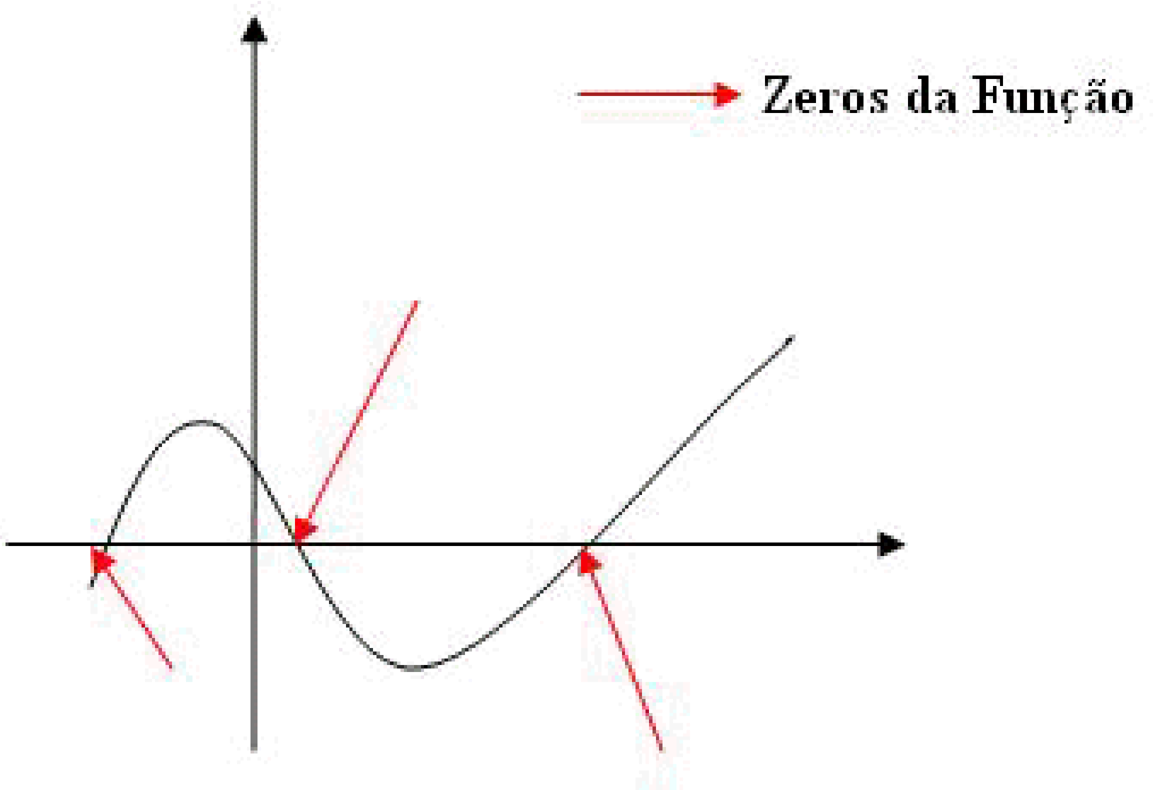
gbca@cin.ufpe.br

Últimas aulas...

- Aritmética de máquina
- Erros
- Sistema de Ponto Flutuante F(b, t, e1, e2)
- Arredondamento
- Operações

E hoje?

- Zeros de funções...



Introdução

- Nas mais diversas áreas das ciências exatas ocorrem situações que envolvem a solução de uma equação do tipo f(x) = 0
- **Um número real** ε é um zero da função f(x) ou uma raíz da equação f(x)=0 se f(ε) = 0
- Os valores de x que anulam f(x) podem ser reais ou complexos
  - Nosso estudo interessa-se apenas pelos valores reais

Introdução

- Podemos resolver $f(x) = 0$ por dois caminhos distintos
  - **Métodos diretos**
    - **Métodos analíticos**
    - **Numero finito de operações**
    - **Processos particulares**
      - **Cada tipo de função deve possuir seu próprio caminho para a solução**
  - **Métodos iterativos**
    - **Partem de uma aproximação inicial da solução**
    - **A cada iteração, uma nova aproximação é gerada**
      - **Até que uma solução satisfatória seja encontrada**

Introdução

- Para algumas equações, como as polinômiais de grau 2 existem fórmulas diretas para se encontrar as raízes
  - Métodos diretos!
- No entanto em polinômios de grau mais alto e no caso de funções mais complicadas essa tarefa não é trivial
  - Métodos iterativos!
  - Uso de aproximações
  - Precisão prefixada

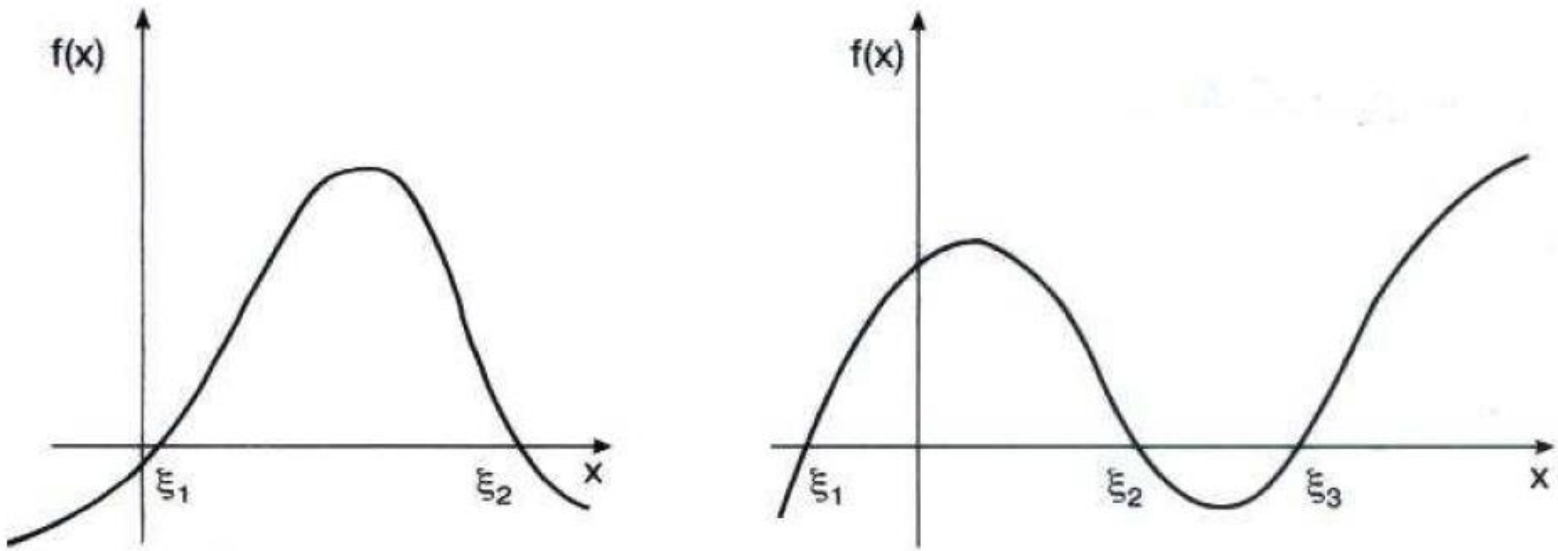
Introdução

- Idéia central de métodos numéricos baseados em aproximações para encontrar zeros de funções:

1. Localização ou isolamento das raízes
    - Obtenção de um intervalo contendo a raíz
2. Refinamento
    - Melhorar a aproximação inicial do intervalo até que seja obtida a precisão prefixada

Aproximação Inicial

- Graficamente, os zeros reais são representados pelas abscissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo x



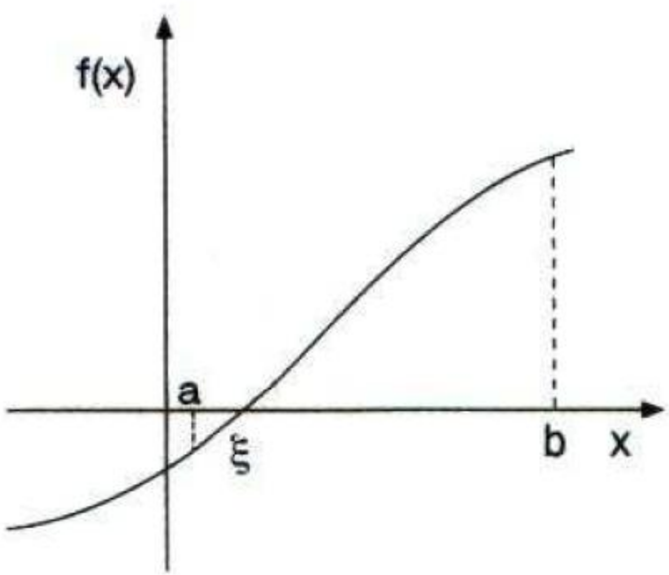
(a) (b)

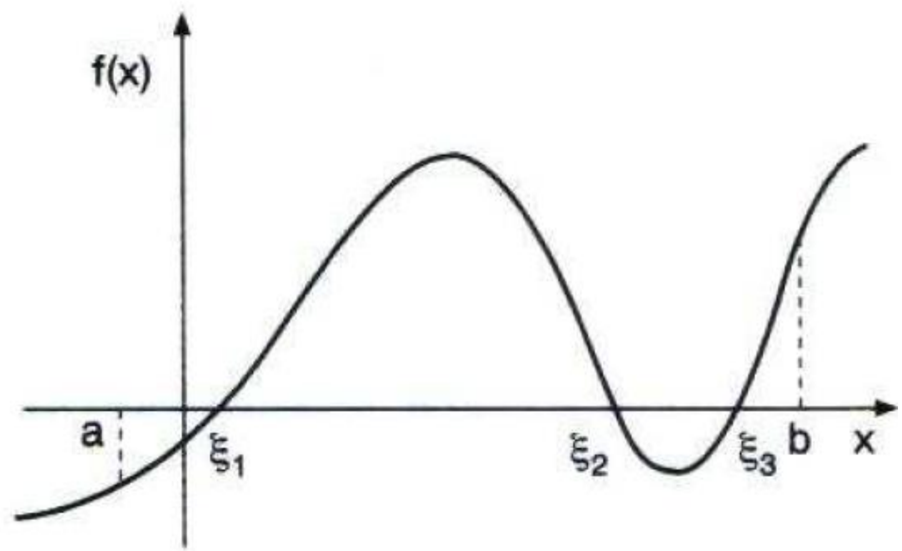
Aproximação Inicial

- Análise teórica e gráfica da função f(x)
- Sucesso da fase de refinamento depende do resultado dessa fase
- Teorema de Bolzano:
  - Seja f(x) uma função continua no intervalo [a,b]
  - Se $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = \varepsilon$ entre a e b que é zero de f(x)

Aproximação Inicial

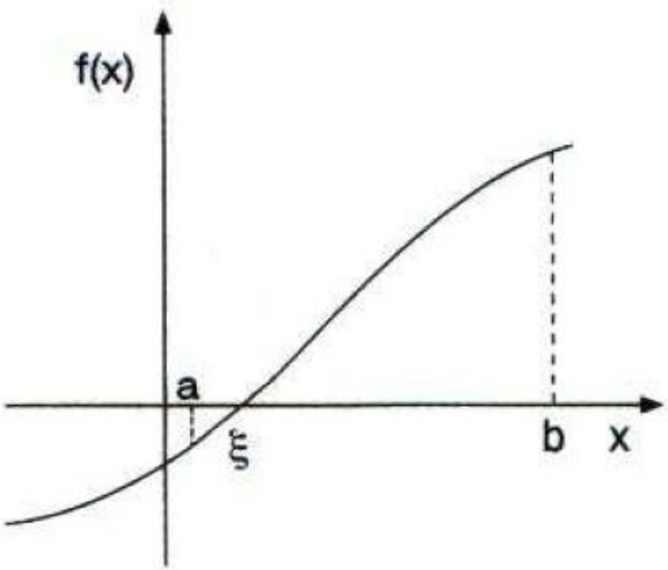
- Graficamente
  - Se f(a).f(b) < 0, então existe pelo menos um ponto $x = \varepsilon$ entre a e b que é zero de f(x)





Aproximação Inicial

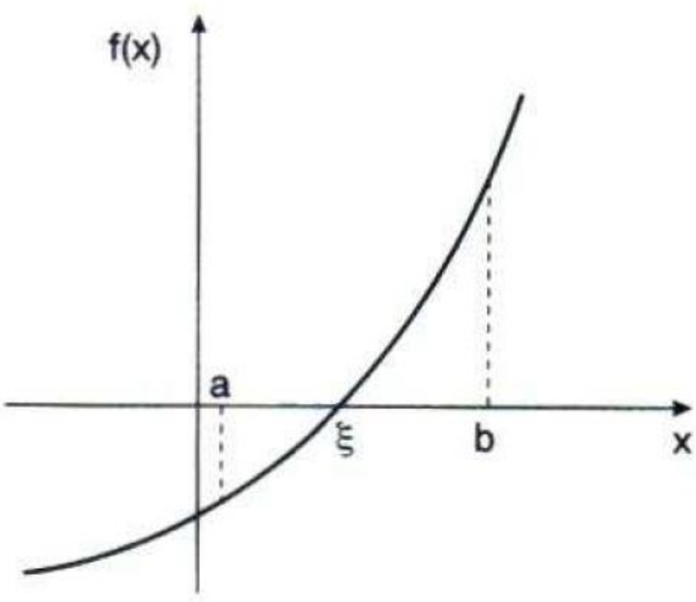
- Graficamente
  - Se f(a).f(b) < 0, então existe pelo menos um ponto x = ε entre a e b que é zero de f(x)



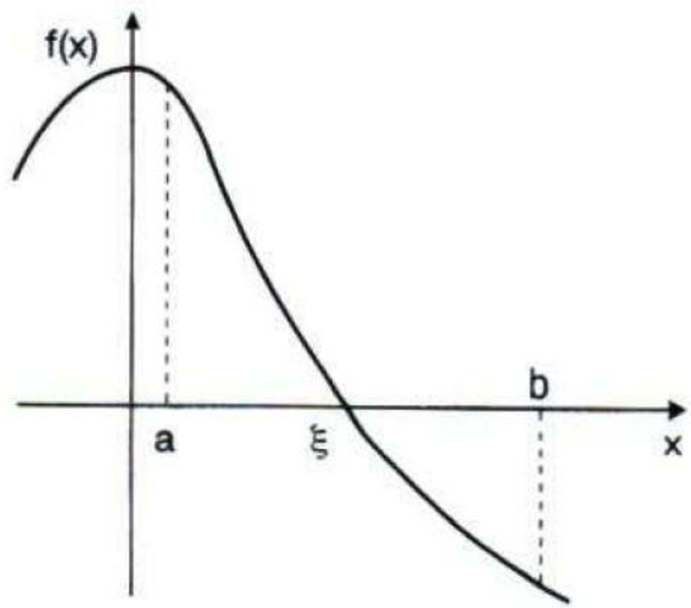
Não significa que exista exatamente uma raiz !

Aproximação Inicial

- Graficamente
  - Se o teorema de bolzano for satisfeito e, além disso,...
  - Se f'(x) existir e preservar o sinal em (a,b), então esse intervalo contém um único zero de f(x)



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

Aproximação Inicial

- Conclusão:
  - Se $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = \varepsilon$ entre a e b que é zero de $f(x)$
  - Se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em (a,b), então esse intervalo contém um único zero de $f(x)$
    - Intervalo de separação!
  - Além disso, f deve ser contínua no intervalo $[a;b]$

Aproximação Inicial

- Conclusão:
  - Uma forma de isolar as raízes de f(x) é tabelar f(x) para diversos valores de x e analisar as mudanças de sinal de f(x) e o sinal da derivada nos intervalos em que f(x) mudou de sinal

Aproximação Inicial

- Exemplo 1

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Construindo uma tabela de valores para f(x) e considerando apenas os sinais, temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+	+

Aproximação Inicial

- Exemplo 1 **Intervalos contém <u>pelo menos</u> um zero de f(x)**

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Construindo uma tabela de valores para f(x) e considerando apenas os sinais, temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+	+

Aproximação Inicial

- Exemplo 1

Intervalos contém <u>pelo menos</u> um zero de f(x)

Como o polinômio é de grau 3, sabemos que cada intervalo contem exatamente uma raíz!

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Construindo uma tabela de valores para f(x) e considerando apenas os sinais, temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	−	−	−	−	+	+	+	−	−	+	+	+

Aproximação Inicial

- Exemplo 2

b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

Temos que $D(f) = \mathbb{R}^+$ ($D(f) \equiv$ domínio de $f(x)$)

x	0	1	2	3	...
f(x)	−	−	+	+	...

Intervalo contém <u>pelo menos</u> um zero de f(x)

Aproximação Inicial

- Para saber se existe um único zero no intervalo, analisamos o sinal de f'(x)

b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \ \forall \ x > 0 \ .$$

- f(x) é continua dentro do intervalo [1;2]
- f'(x) não muda de sinal dentro do intervalo [1;2]
- Como f(1).f(2)<0, concluímos que existe exatamente uma raíz no intervalo [1;2]

Aproximação Inicial

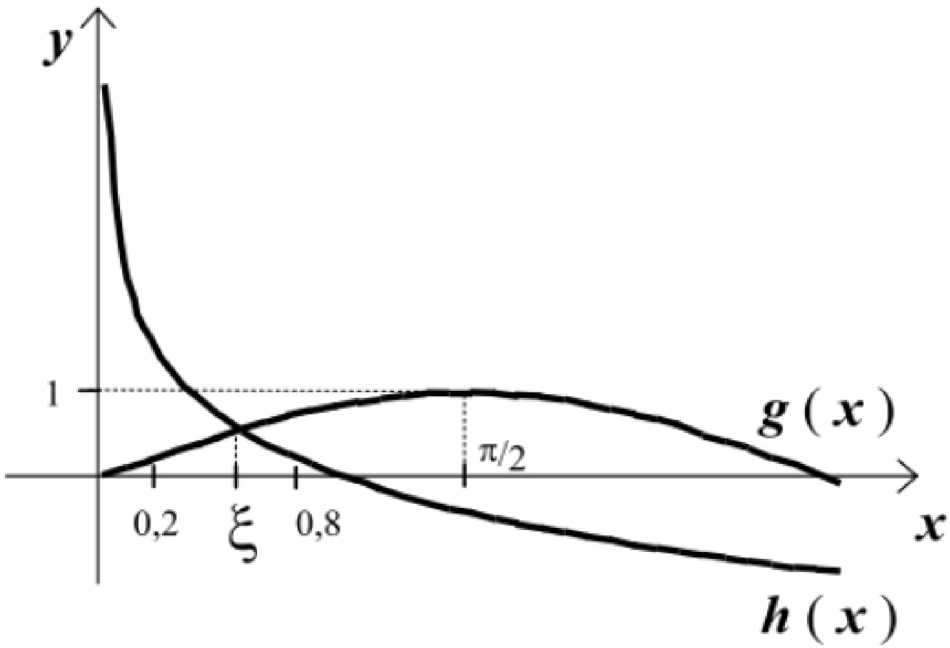
- Na análise gráfica da função f(x) podemos utilizar um dos seguintes processos:

1. Esboçar o gráfico da função f(x) e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo x
2. A partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos de g(x) e h(x) e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam
    1. $f(\varepsilon) = 0 \iff g(\varepsilon) = h(\varepsilon)$

Exemplo 2.1

Exemplo 2.1 - Determine um intervalo de separação de amplitude 0,1 (b – a = 0,1) da menor raiz real da função $f(x) = sen\,x + ln\,x$.

- f(x)=sen(x)+ln(x)
- g(x)=h(x)
  - g(x)=sen(x)
  - h(x)=-ln(x)

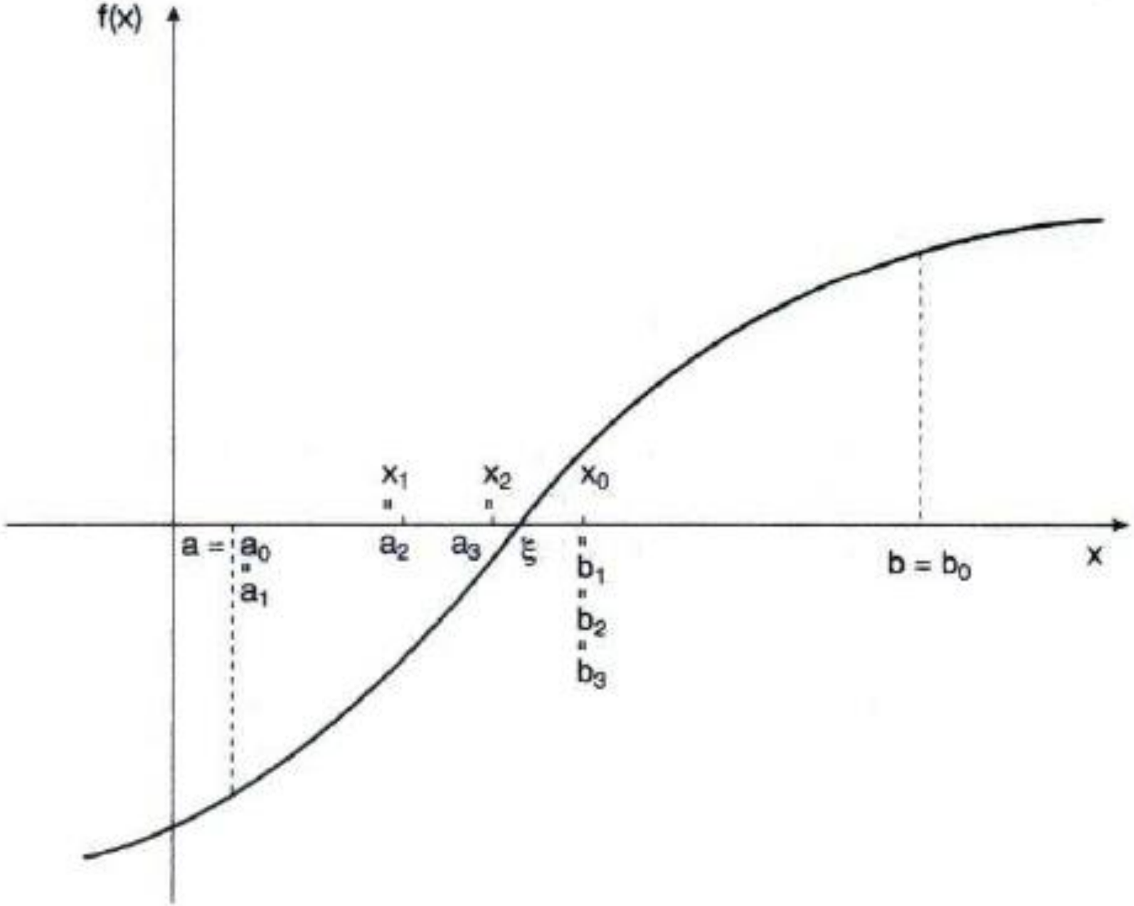


Métodos

- Com o estudo do gráfico e o estudo analítico, chegamos a resultados aproximados, mas ainda distantes do ideal...
- Precisamos de métodos para ir um pouco mais além..
- Importante notar que os métodos que vamos estudar nesta aula partem sempre de um intervalo de separação..

Método da Bisseção

Qual a primeira solução que poderíamos utilizar?



Método da bisseção

- Seja a função f(x) contínua no intervalo [a,b] e tal que f(a).f(b) < 0, supondo que este intervalo contenha apenas uma única raíz
- O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raíz até se atingir a precisão requerida: $b - a < E$
  - Utiliza a sucessiva divisão de [a,b] ao meio

Método da bisseção - Algoritmo

1. Escolha a,b (extremos do intervalo de separação) ,l (precisão relacionada à amplitude do intervalo [a;b]) e P_2(precisão relacionada à distância da imagem de x_0 para o eixo x)
2. Faça
    1. $c = b - a$
    2. $x_0 = (a + b)/2$
    3. Fim;
3. Enquanto $c > l$ ou $f(x_0) > P_2$
    1. Se $f(a) \times f(x_0) < 0$
        1. $b = x_0$
    2. Se $f(b) \times f(x_0) < 0$
        1. $a = x_0$
    3. $c = b - a$
    4. $x_0 = (a + b)/2$
4. Fim.
5. (x_0 contem o valor aproximado da raíz procurada)

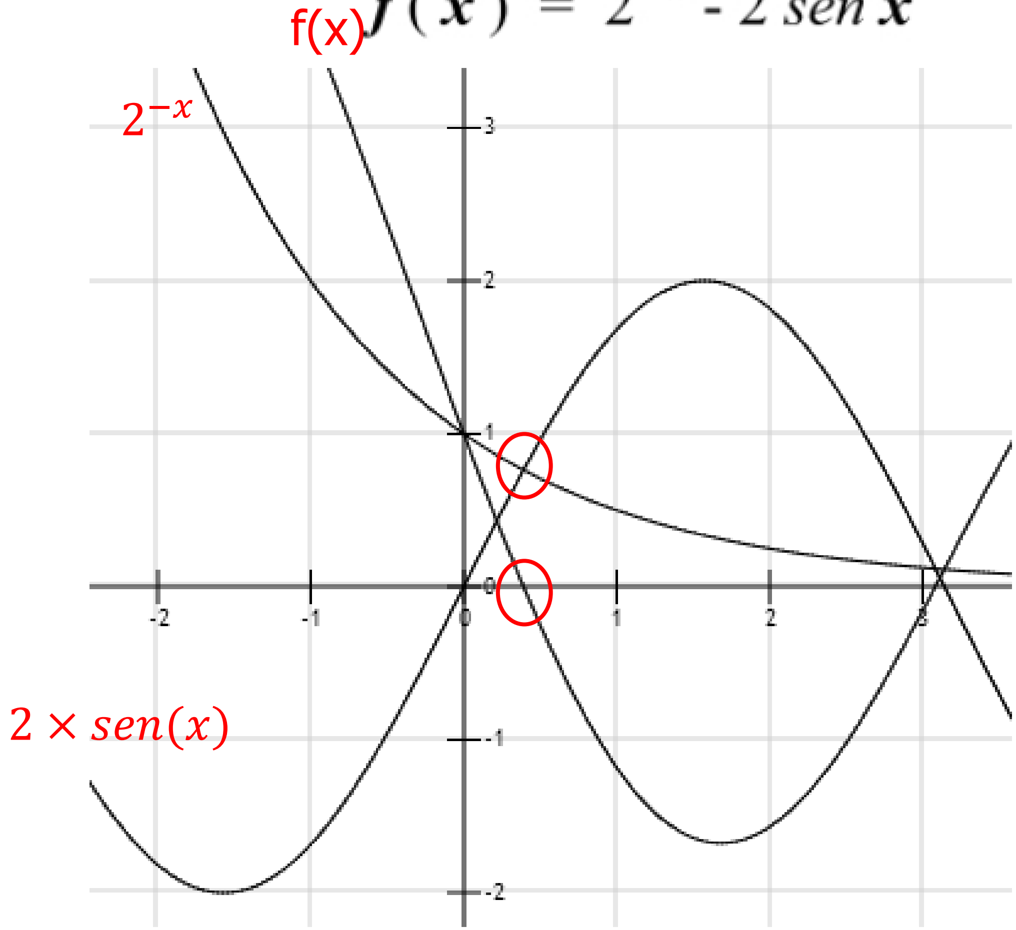
Poderíamos, ocasionalmente, trocar o "ou" por um "e"....

Também poderíamos desconsiderar um dos dois testes de precisão

Exemplo 2.2

Exemplo 2.2. - Determinar, usando o método da Bisseção, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função

$$f(x) = 2^{-x} - 2\,sen\,x$$



Exemplo 2.2

- Considerações
  - Facilmente podemos verificar que f(0).f(1)<0
    - f(0)=1 e f(1)=-1,18
  - $f'(x) = -2^{-x} \times \ln(2) - 2\cos(x)$
    - Análise $\forall x \mid x \in [0;1]$
    - $-2^{-x} \times \ln(2) < 0$ e $-2\cos(x) < 0$, logo
    - $f'(x)$ mantém sinal negativo em [0;1]
  - f é contínua entre 0 e 1.
- Algoritmo da Bisseção
  - Considere l=0,05 (amplitude final).
  - a=0
  - b=1
  - c = 1-0 = 1 > l
  - Como c > l e f(0) x f(0,5)<0, temos que b = x_0 = 0,5.
  - Seguimos as iterações até chegarmos a uma condição de parada.

Exemplo 2.2

Iteração **i**	***a***	***b***	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	***c***
0	0,000000	1,000000	1,000000	-1,182942	0,500000	-0,251744	1,00000
1	0,000000	0,500000	1,000000	-0,251744	0,250000	0,346088	0,50000
2	0,250000	0,500000	0,346088	-0,251744	0,375000	0,038560	0,25000
3	0,375000	0,500000	0,038560	-0,251744	0,437500	-0,108939	0,12500
4	0,375000	0,437500	0,038560	-0,108939	0,406250	-0,035752	0,06250
5	0,375000	0,406250	0,038560	-0,035752	0,390625	0,001266	0,03125

Tabela 2.1. Valores do método da Bisseção no cálculo da menor raiz real da função $f(x) = 2^{-x} - 2\,sen\,x$.

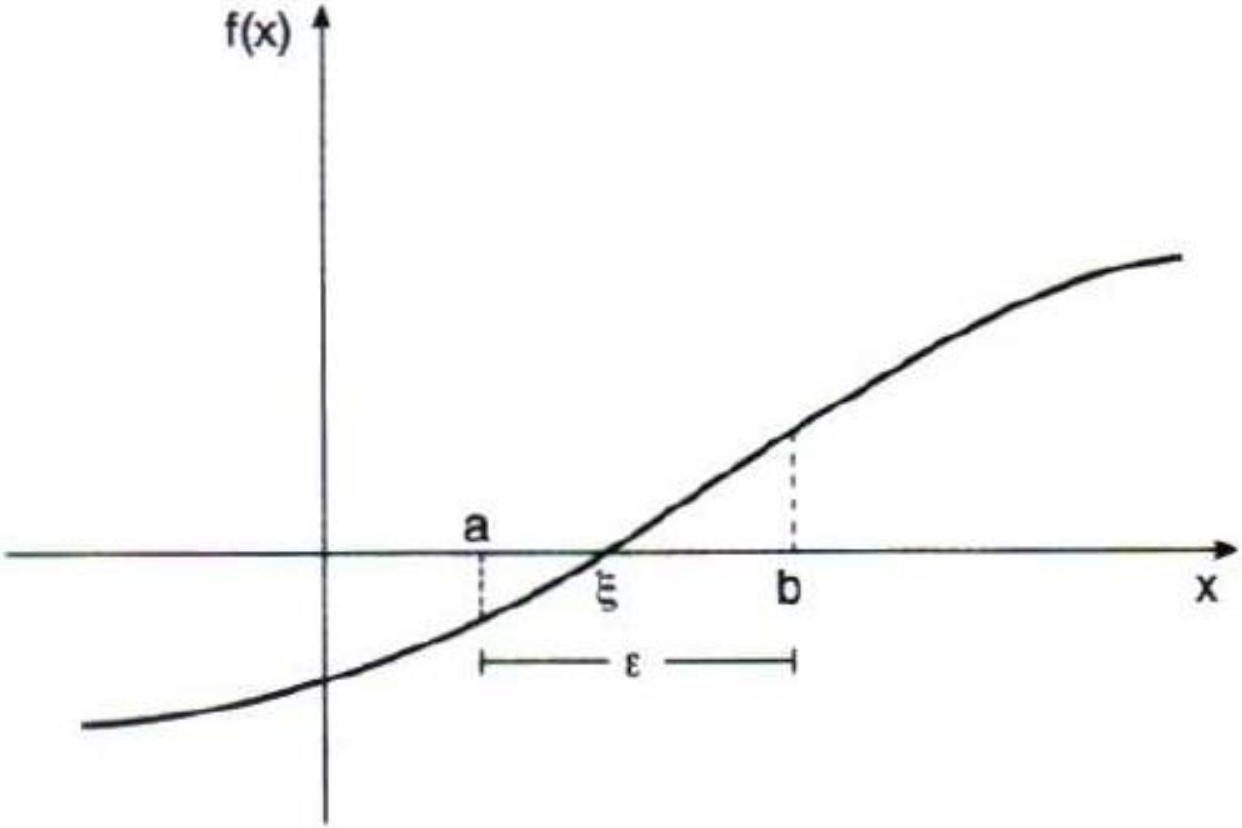
Exemplo 2.2

- Notar que em cada iteração o valor de x_i vai se aproximando do valor real (0,391158).
- Na iteração 5, chegamos ao valor 0,390625.
- Importante: O método não funciona se a função considerada apenas tangenciar o eixo dos x.

Exercícios

- Calcule a raiz real da equação $x^2 + ln(x) = 0$ com tolerância máxima de $l < 10^{-2}$ usando o método da bisseção. Considere um sistema de 4 dígitos
  - *Necessário calcular aproximação inicial de amplitude 0,5
- Calcule a raíz real da equação xlog(x)-1 que possui zero em [2,3] para um erro menor que 0,001

Como definir uma aproximação suficientemente boa?



Convergência

- Facilmente, vemos que o algoritmo da bisseção gera três sequencias: $\{a_k\}$, $\{x_k\}$ e $\{b_k\}$ de modo que ak $a_k \leq x_k \leq b_k$; k=0, 1, ...
- Logo, é fácil verificar que:
- $b_k - a_k = (b_0 - a_0) / 2^k$
  - k=0, 1, 2,...
- Com k suficientemente grande, $\{a_k\}$, $\{x_k\}$ e $\{b_k\}$ tendem para um mesmo valor z. Temos:

$$lim_{k \to \infty} f(a_k) \times f(b_k) = f(z) \times f(z) = [f(z)]^2 \geq 0;$$

Convergência

por outro lado, como $f(a_k) \times f(b_k) \leq 0$ ($[a_k; b_k]$ é de separação), temos portanto que $f(z) = 0$, o que prova que a seqüência $\{x_k\}$ converge para a raiz de f em $\mathbf{I}$.

Precisão preestabelecida

- Podemos prever exatamente qual o menor numero de iterações para que a precisão estabelecida seja alcançada
- Dada uma função $\boldsymbol{f}$, um intervalo de separação $\boldsymbol{I} = [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$, e a amplitude final $\boldsymbol{l}$:
  - $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, \forall k \in N$, logo
  - $\frac{b_0 - a_0}{2^k} \leq l \Rightarrow 2^k \geq (b_0 - a_0)/l$, assim
  - $k \geq \frac{(\ln(b_0 - a_0) - \ln(l))}{\ln(2)} = t$
- k é o menor inteiro maior ou igual a t

Método da falsa posição

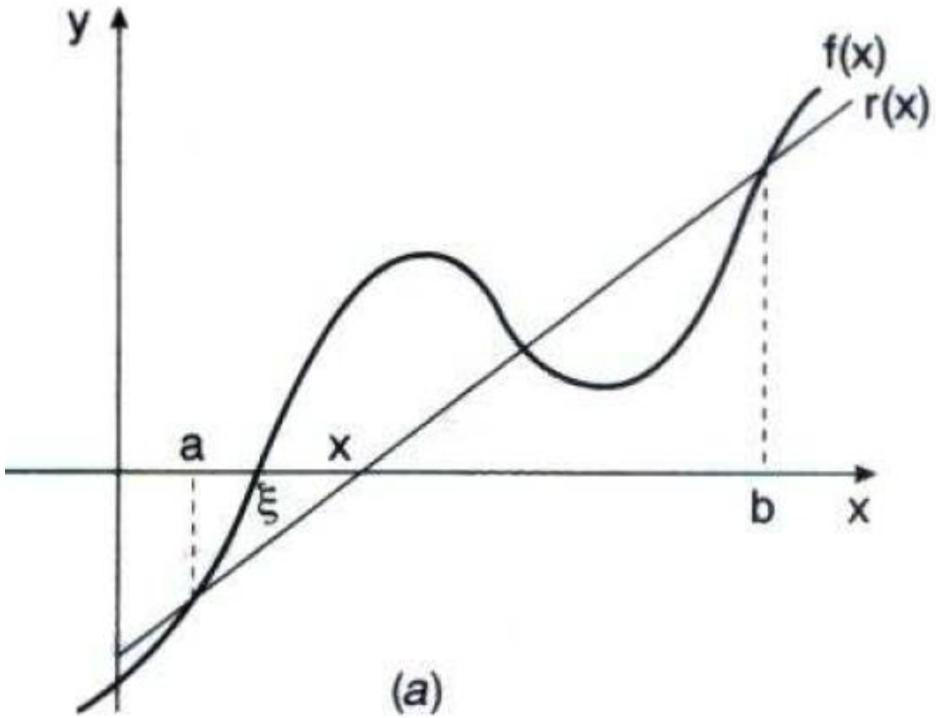
ou Método das Cordas

Falsa posição

- Assim como o método da bisseção, também é um método de quebra
  - Quebra é realizada no ponto de interseção da reta definida pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo x
  - Substituímos a função f por uma reta

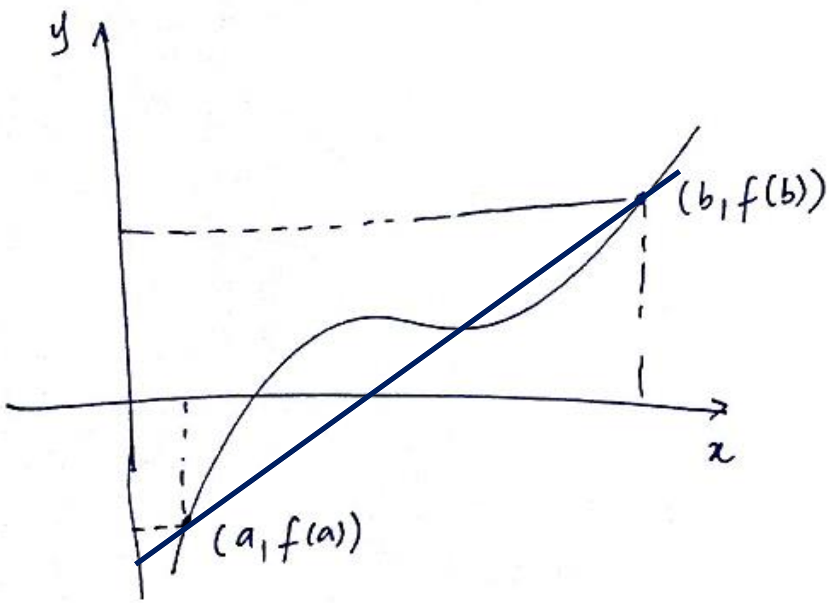
Falsa posição

- Idéia geométrica



(a)

Falsa posição



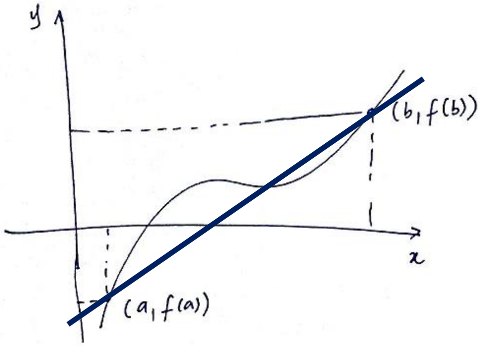
$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a)$$

Falsa Posição



$$y = 0$$

$$0 = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a$$

$$0 = f(a) + \frac{f(b)x - f(a)x - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$-f(a)(b-a) + f(b)a - f(a)a = x(f(b)-f(a))$$

$$-f(a)b + f(a)a + f(b)a - f(a)a = x(f(b)-f(a))$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} \checkmark$$

Falsa posição

- Logo...
  - $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x - a)$
  - Podemos definir a interseção com o eixo x (fazendo y=0)
  - $x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

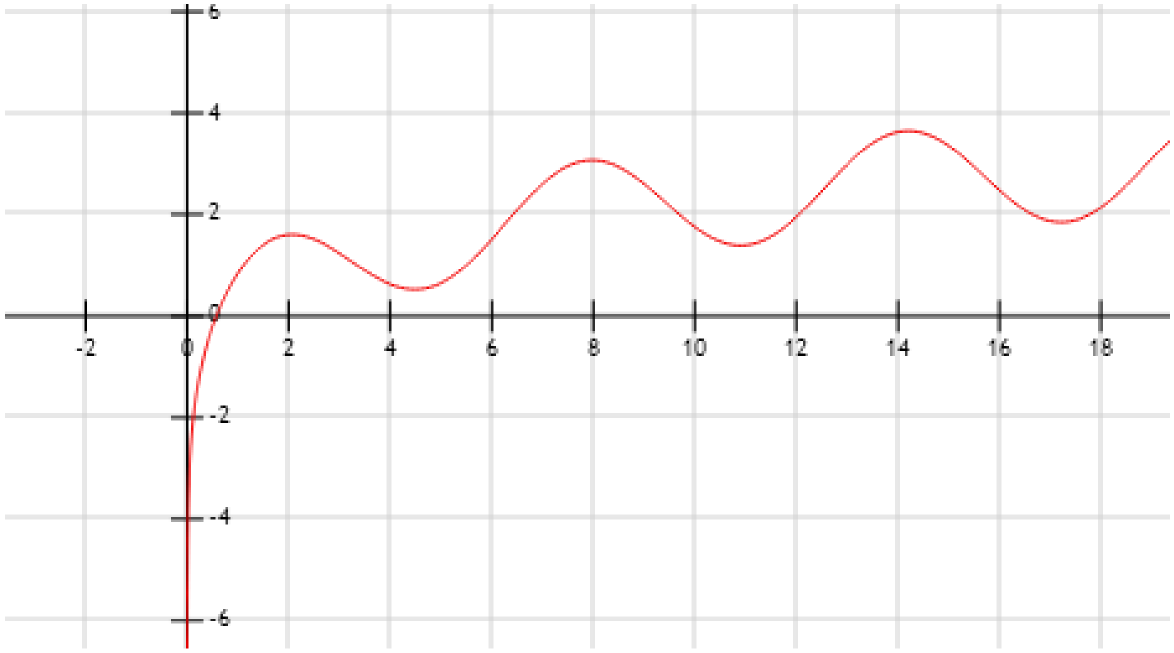
Falsa posição

- Podemos obter um algoritmo para o método da falsa posição similar ao algoritmo para o método da bisseção
  - Mudamos apenas a "máquina geradora"
  - Ao invés de calcular o valor de x como
  - $x = (a + b)/2$, teremos
  - $x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

Exemplo 2.3

Exemplo 2.3. - Determinar, usando o método das Cordas, o valor aproximado da menor raiz real positiva da função:

$$f(x) = sen\, x + ln\, x\,.$$



Exemplo 2.3

- Como vimos no exemplo 2.1, já podemos começar com o intervalo [0,5; 0,6].

Iteração i	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
1	0,50000	0,600000	-0,213722	0,053817	0,579884	0,003001	—
2	0,50000	0,579884	-0,213722	0,003001	0,578778	0,000166	0,001106
3	0,50000	0,578778	-0,213722	0,000166	0,578717	0,000009	0,000061
4	0,50000	0,578717	-0,213722	0,000009	0,578714	0,000001	0,000003

Tabela 2.2. Valores do método das Cordas no cálculo da menor raiz real da função $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$.

- Nesse caso não utilizamos a amplitude como critério de parada. Nas próximas aulas estudaremos mais em detalhes...

Exercícios

1. Aplique o método da falsa posição na função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ no intervalo [0,1] considerando $l = 5.10^{-4}$
2. Aplique o método da falsa posição na função $f(x) = cos(x) + x$ considerando $l = 0.001$
3. Aplique o método da falsa posição na função $f(x) = e^x + x$ considerando $l = 0.01$